MN I

Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2024

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan José Nieto Muñoz.

Fecha 28 de mayo de 2025.

Duración 2 horas.

Descripción Segundo Parcial.

Observaciones Contiene respuestas a varias versiones, no a una única prueba. Los dos últimos ejercicios fueron comunes para todos y del primero eran 6 apartados distintos, no comunes entre los que estábamos haciendo el examen.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Dado un natural $n \geqslant 3$, un vector no nulo $b \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, verificando:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n : a_{i,i} = -1, \quad \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| < 1,$$

determina razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Existen matrices A en estas condiciones que no tienen inversa.

b) El sistema $(-A)x = b$ puede ser incompatible.

c) El sistema $(-A)x = b$ tiene infinitas soluciones.

d) El método iterativo de Jacobi aplicado a $Ax = 0$ converge.

e) El método iterativo de Gauss-Seidel aplicado a $Ax = 0$ converge.

f) La matriz, sin permutar ninguna fila, admite descomposición de Crout.

g) La matriz, sin permutar ninguna fila, admite descomposición de Doolitle.

h) La matriz, sin permutar ninguna fila, admite una descomposición de tipo $A = -LL^T$.

i) La matriz $(-A)$ admite una descomposición de Cholesky.

j) Si $\lambda \in \sigma(A + 2I) \cap \mathbb{R}$, entonces $\lambda > 0$.

k) Si $\lambda \in \sigma(I - A)$, entonces $\lambda > 0$.

l) Si $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{C}$, entonces $\Re(\lambda) < 0$.

m) La matriz A no tiene valor propio dominante.

n) La matriz A tiene valor propio dominante.

ñ) La matriz A tiene valor propio dominante $\lambda = -1$.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica que, por lo tanto, sabemos que tiene n vectores propios $\{v_1, \ldots, v_n\}$ perpendiculares y se pueden tomar formando una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\|v_i\|_2^2 = \langle v_i, v_i\rangle = v_i^T v_i = 1 \quad \forall i, \qquad \text{y} \qquad \langle v_i, v_j\rangle = v_i^T v_j = 0\, \forall i \neq j.$$

Además, en este caso suponemos que sus n valores propios reales son distintos. Tomando cualquiera de ellos, por ejemplo λ_n, y su vector propio asociado v_n, consideramos la matriz:

$A^* = A - \lambda_n v_n v_n^T$, (observa que v_n es columna y v_n^T es fila, por lo que $v_n v_n^T$ es una matriz $n \times n$).

a) Demuestra que $A^* v_n = 0$ y que $A^* v_i = \lambda_i v_i$ para $i \neq n$.

b) Determina el conjunto $\sigma(A^*)$ en función de $\sigma(A)$.

c) Utiliza estos apartados para idear un método, combinando si es preciso el de las potencias usado varias veces, para calcular el espectro completo de A.

Ejercicio 3 (3 puntos). Considere el método iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}(4x_2^{(k)} + 3) \\ \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{6}(4x_1^{(k+1)} - 8) \end{cases}$$

a) Determina un sistema $Ax = b$ con el que sea consistente.

b) ¿Es convergente? En caso afirmativo, ¿a qué converge?

c) Comenzando con $(x_1, x_2)^{(0)} = (1, 0)$, determina el número mínimo de iteraciones que garantice que el error absoluto cometido al aproximar $A^{-1}b$ sea inferior a 10^{-5}.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Dado un natural $n \geqslant 3$, un vector no nulo $b \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, verificando:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n : a_{i,i} = -1, \quad \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| < 1,$$

determina razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Existen matrices A en estas condiciones que no tienen inversa.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ Resultado de clase: Toda matriz EDD tiene inversa.

b) El sistema $(-A)x = b$ puede ser incompatible.

c) El sistema $(-A)x = b$ tiene infinitas soluciones.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ Como A es EDD, $-A$ también, tiene inversa y el SEL es compatible determinado.

d) El método iterativo de Jacobi aplicado a $Ax = 0$ converge.

e) El método iterativo de Gauss-Seidel aplicado a $Ax = 0$ converge.

Solución. $\boxed{\text{Verdadero.}}$ Resultado de clase: cuando A es EDD, Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

f) La matriz, sin permutar ninguna fila, admite descomposición de Crout.

g) La matriz, sin permutar ninguna fila, admite descomposición de Doolitle.

Solución. $\boxed{\text{Verdadero.}}$ Como A es EDD, entonces todas sus submatrices principales A_k lo son, por tanto, todas las A_k tienen inversa y, por ende, determinante no nulo. Resultado de clase: cuando todas las A_k tienen determinante no nulo, la matriz admite factorización LU (en cualquier variante, Doolittle y Crout).

h) La matriz, sin permutar ninguna fila, admite una descomposición de tipo $A = \ -LL^T$.

i) La matriz $(-A)$ admite una descomposición de Cholesky.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ En ambos casos, A tendría que ser simétrica. Vale como contraejemplo cualquier matriz que cumpla lo de arriba y que no sea simétrica.

j) Si $\lambda \in \sigma(A + 2I) \cap \mathbb{R}$, entonces $\lambda > 0$.

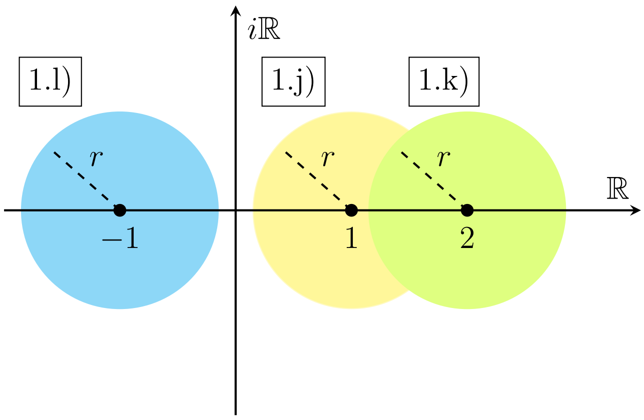
k) Si $\lambda \in \sigma(I - A)$, entonces $\lambda > 0$.

l) Si $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{C}$, entonces $\Re(\lambda) < 0$.

Solución. $\boxed{\text{Verdadero.}}$ Todos los casos se resuelven aplicando los discos de Gerchgorin. El número de la diagonal, dentro de los discos, es fijo en todos los casos, y los radios no varían:

$$r_i = \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| < 1, \quad r = \max_i r_i < 1;$$

En el dibujo se aprecian los 3 casos y cómo los valores propios se quedan a la izquierda o a la derecha de 0, según cada uno.



m) La matriz A no tiene valor propio dominante.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ Jugando con matrices sencillas por bloques

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son fáciles de calcular: $\lambda_1 = -1 - a$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -1 + a$. Podemos hallar un contraejemplo tomando cualquier $0 < a < 1$.

n) La matriz A tiene valor propio dominante.

ñ) La matriz A tiene valor propio dominante $\lambda = -1$.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ Por ejemplo una matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tomando cualquier $0 \leqslant a < 1$, que sólo tiene un valor propio: $\lambda_1 = -1$ repetido 3 veces y por tanto, no es dominante.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica que, por lo tanto, sabemos que tiene n vectores propios $\{v_1, \ldots, v_n\}$ perpendiculares y se pueden tomar formando una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\|v_i\|_2^2 = \langle v_i, v_i\rangle = v_i^T v_i = 1 \quad \forall i, \qquad \text{y} \qquad \langle v_i, v_j\rangle = v_i^T v_j = 0\, \forall i \neq j.$$

Además, en este caso suponemos que sus n valores propios reales son distintos. Tomando cualquiera de ellos, por ejemplo λ_n, y su vector propio asociado v_n, consideramos la matriz:

$A^* = A - \lambda_n v_n v_n^T$, (observa que v_n es columna y v_n^T es fila, por lo que $v_n v_n^T$ es una matriz $n \times n$).

a) Demuestra que $A^* v_n = 0$ y que $A^* v_i = \lambda_i v_i$ para $i \neq n$.
Simplemente, calculamos:

$$A^* v_n = (A - \lambda_n v_n v_n^T) v_n = A v_n - \lambda_n v_n \overbrace{(v_n^T v_n)}^{=1} = \lambda_n v_n - \lambda_n v_n = 0.$$

Análogamente, para $i \neq n$:

$$A^* v_i = (A - \lambda_n v_n v_n^T) v_i = A v_i - \lambda_n v_n \overbrace{(v_n^T v_i)}^{=0} = \lambda_i v_i - 0 = \lambda_i v_i.$$

b) Determina el conjunto $\sigma(A^*)$ en función de $\sigma(A)$.

Como consecuencia del apartado anterior, los valores propios de A^* son los mismos que los de A, salvo el λ_n, que ha sido sustituido por $\lambda = 0$. Así ya vale; con símbolos sería, por ejemplo:

$$\sigma(A^*) = (\sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \cup \{0\}.$$

c) Utiliza estos apartados para idear un método, combinando si es preciso el de las potencias usado varias veces, para calcular el espectro completo de A.

La idea es aplicar el ejercicio de forma iterada para, en cada paso, sacar el dominante, "transformarlo en 0" e iterar para sacar el siguiente. Previamente, para evitar que en un paso aparezca un "dominante" y su opuesto, trasladaremos A para que todos sus valores propios estén a un solo lado de 0, pues ordenados ya están (son $\leqslant$). El proceso podría ser:

Paso 1. Aplicar Discos de Gerchgorin para hallar $a > 0$ tal que $\ldots \sigma(A) \subseteq [-a, a]$.
Traslado $A_1 = (A - aI)$: valores propios $\mu_i = \lambda_i - a$
$\Rightarrow A_1$ tiene espectro ordenado y negativo: $\sigma(A_1) = \{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < 0\}$.

Paso 2, bucle: para $k = 1, 2, \ldots, n$

- Para $k = 1$: aplico potencias a A_1 y obtengo μ_1 y v_1; $\ldots \lambda_1 = \mu_1 + a$.
Defino $A_2 = A_1^* = A_1 - \mu_1 v_1 v_1^T$, así su espectro: $\ldots \sigma(A_2) = \{\mu_2, \ldots, \mu_n, 0\}$.
- Para $k = 2$: aplico potencias a A_2 y obtengo μ_2 y v_2; $\ldots \lambda_2 = \mu_2 + a$.
Defino $A_3 = A_2^* = A_2 - \mu_2 v_2 v_2^T$, así su espectro: $\ldots \sigma(A_3) = \{\mu_3, \ldots, \mu_n, 0, 0\}$.
- Caso genérico k: aplico potencias a A_k y obtengo μ_k y v_k; $\ldots \lambda_k = \mu_k + a$.
Defino $A_{k+1} = A_k^* = A_k - \mu_k v_k v_k^T$, su espectro $\ldots \sigma(A_{k+1}) = \{\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n, 0, \ldots, 0\}$.

Al concluir el bucle, tenemos todos los λ_k del espectro de A.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Considere el método iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}(4x_2^{(k)} + 3) \\ \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{6}(4x_1^{(k+1)} - 8) \end{cases}$$

a) Determina un sistema $Ax = b$ con el que sea consistente.

Quienes solo mirando que es Gauss-Seidel aplicado a un sistema 2×2, llevan ventaja:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}\left(4x_2^{(k)} + 3\right) = \dfrac{1}{a_{1,1}}\left(-a_{1,2}x_2^{(k)} + b_1\right) \\ \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{6}\left(4x_1^{(k+1)} - 8\right) = \dfrac{1}{a_{2,2}}\left(-a_{2,1}x_1^{(k+1)} + b_2\right) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Para el resto, basta recordar que para que $Ax = b$ sea consistente, el punto fijo del método y su solución han de ser iguales; por tanto, partimos del punto fijo y despejamos:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(4x_2 + 3) \quad \Rightarrow \quad 5x_1 - 4x_2 = 3 \\ \\ x_2 = \dfrac{1}{6}(4x_1 - 8) \quad \Rightarrow \quad -4x_1 + 6x_2 = -8 \end{cases}$$

Obteniendo el mismo sistema, ¡aunque valdría cualquier otro equivalente!

De camino, si lo vemos como Gauss-Seidel (que lo es), la matriz B del método será:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ 0 & 8/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}5333 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Es convergente? En caso afirmativo, ¿a qué converge?

Por supuesto, la misma B (obviamente) también puede deducirse directamente desde el método dado para responder este apartado (y me sale la c, aunque no la necesito):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}\left(4x_2^{(k)} + 3\right) = 0{,}8\, x_2^{(k)} + 0{,}6, \text{ y lo sustituyo en la de abajo:} \\ \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4}{5}\left(4x_2^{(k)} + 3\right) - 8\right) = \dfrac{16}{30}x_2^{(k)} + \dfrac{12}{30} - \dfrac{8}{6} = 0{,}5333\, x_2^{(k)} - 0{,}9333 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8x_2^{(k)} + 0{,}6 \\ 0{,}5333x_2^{(k)} - 0{,}9333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}5333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}9333 \end{pmatrix}$$

En este caso, se puede ver sin hacer cuentas que su radio espectral es $\rho(B) = 0{,}5333 < 1$, por ser B triangular, como su norma infinito: $\|B\|_\infty = 0{,}8 < 1$, por lo que el método converge.

Y converge, bien a la solución $x = A^{-1}b$ del sistema dado en el apartado a) y recordado en el apartado c, bien al punto fijo del método original, ¡que son iguales por consistencia!

Podemos usar por tanto ambas cosas para determinarlo, y sale fácilmente $x = (-1, -2)$.

c) Comenzando con $(x_1, x_2)^{(0)} = (1, 0)$, determina el número mínimo de iteraciones que garantice que el error absoluto cometido al aproximar $A^{-1}b$ sea inferior a 10^{-5}.

Como ya tenemos: $\|B\|_\infty = 0{,}8 < 1$, usamos el resultado de clase que sigue, e imponemos la segunda desigualdad (nótese que solo usamos la norma $\|\cdot\|_\infty$):

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leqslant \frac{\|B\|_\infty^k}{1 - \|B\|_\infty}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \Rightarrow \frac{(0{,}8)^k}{0{,}2} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leqslant 10^{-5}$$

Para concluir, calculamos una iteración $x^{(1)} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-14}{15}\right)$, de donde:

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{14}{15} = 0{,}933$$

Por tanto, solo resta despejar k, tomando logaritmos:

$$k \geqslant \frac{1}{\ln(0{,}8)} \ln\left(\frac{10^{-5} \cdot 0{,}2}{0{,}933}\right) \approx 58{,}5 \Rightarrow \text{ Hay que dar al menos 59 pasos.}$$